

臺南市 108 年公私立國民中學數學競賽複賽試題

注意事項：

1. 試題所提供圖形僅供參考。
2. 本試卷共有三頁，分為兩大題，第一大題為 1 到 10 題每題 4 分；第二大題為 11 到 22 題每題 5 分

第一大題：

1. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為三正整數，如果  $a$  是 15 的倍數， $b$  是 12 的倍數，且  $c$  是 21 的倍數，則下列何者必成立？  
 (A)  $a+b+c$  必為 9 的倍數 (B)  $a+b+c$  必為偶數 (C)  $(a+b+c)^2$  必為 9 的倍數  
 (D)  $a^2+b^2+c^2$  必為 15 的倍數

2. 試問一元一次方程式  $\frac{x}{1 \times 2} + \frac{x}{2 \times 3} + \frac{x}{3 \times 4} + \dots + \frac{x}{99 \times 100} = 99$  的解為何？

- (A)  $\frac{1}{100}$  (B)  $\frac{1}{99}$  (C) 99 (D) 100

3. 化簡  $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$  的值為下列何者？

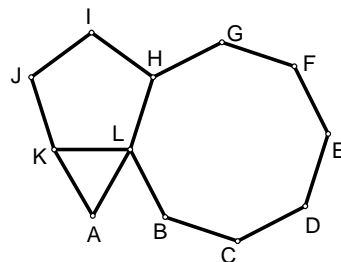
- (A)  $2\sqrt{6}$  (B)  $4\sqrt{6}$  (C) 12 (D) 24

4. 已知實數  $a, b$  滿足條件  $a^2b + ab^2 + a + b = 63$  與  $ab = 6$ ，則  $a^2 + b^2$  的值為何？

- (A) 13 (B) 55 (C) 69 (D) 81

5. 如圖， $\triangle AKL$  為正三角形， $HIJKL$  為正五邊形，以及  $BCDEFGHL$  為正八邊形，且  $L$  為此三圖形之公共頂點，試問  $\angle ALB$  的度數為多少度？

- (A)  $43^\circ$  (B)  $57^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $75^\circ$



6. 已知  $a = \sqrt{2019} - \sqrt{2020}$ ， $b = \sqrt{2020} - \sqrt{2021}$ ， $c = \frac{\sqrt{2019} - \sqrt{2021}}{2}$ ；則  $a, b, c$  三數的大小關係為何？

- (A)  $a < b < c$  (B)  $a < c < b$  (C)  $c < a < b$  (D)  $b < c < a$

7. 已知  $a$  是 2019 的正平方根， $\sqrt{b} = 2019$ ，則  $a, b$  兩數的關係式為何？

- (A)  $a = b$  (B)  $a = b^2$  (C)  $a^2 = b$  (D)  $a^4 = b$

8. 設  $n$  為正整數，令  $n^*$  表示等差數列  $n, n-3, n-6, n-9, \dots$  的和(其中每一項均為正整數)，例如：

$$8^* = 8 + 5 + 2 = 15, \quad 12^* = 12 + 9 + 6 + 3 = 30; \quad \text{請問 } 91^* \text{ 的值為何?}$$

- (A) 1080 (B) 1426 (C) 1472 (D) 4186

9. 已知  $p$  為質數，如果  $p+10$ 、 $p+14$ 、 $p+100$  都是質數，則  $p^2+1$  的值為何？

- (A) 5 (B) 10 (C) 26 (D) 50

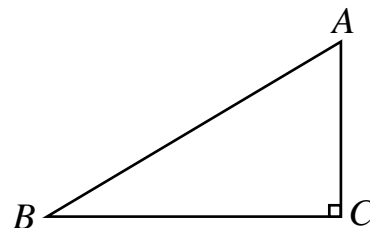
10. 化簡  $\frac{\left(1 - \frac{7}{2}\right) \times \left(1 - \frac{7}{3}\right) \times \left(1 - \frac{7}{4}\right) \times \left(1 - \frac{7}{5}\right) \times \left(1 - \frac{7}{6}\right)}{\left(1 - \frac{9}{2}\right) \times \left(1 - \frac{9}{3}\right) \times \left(1 - \frac{9}{4}\right) \times \left(1 - \frac{9}{5}\right) \times \left(1 - \frac{9}{6}\right) \times \left(1 - \frac{9}{7}\right) \times \left(1 - \frac{9}{8}\right)}$  的值為下列何者？

- (A)  $-\frac{4}{3}$  (B)  $-\frac{3}{4}$  (C)  $\frac{4}{3}$  (D)  $\frac{3}{4}$

〈背後尚有試題〉

第二大題：

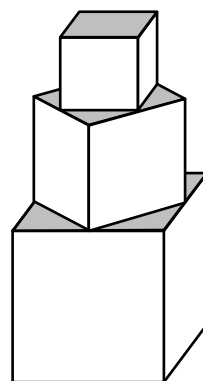
11. 有一本書不知有多少頁，今將其頁數分別標上 $1, 2, 3, \dots, n$ 。如果把這些頁數編號相加起來，但其中有一頁數編號不小心加了2次，得到總和為2019，試問這多加一次的頁數編號為何？  
 (A) 3 (B) 6 (C) 13 (D) 16
12. 自 $1, 2, 3, \dots, 9$ 這9個數中選出7個不同的數相加，其和是3的倍數，試問共有多少種不同的選法滿足上述條件？  
 (註：1+2和2+1視為相同結果)  
 (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12
13. 設 $f(n)$ 表示正整數 $n$ 之最大奇因數，例如 $f(3)=3$ ， $f(10)=5$ ，則 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(50)$ 的值為何？  
 (A) 842 (B) 843 (C) 844 (D) 845
14. 如圖所示，直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\overline{AB}=5$ ，兩股 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的長是 $x$ 的一元二次方程式 $x^2-(m+5)x+6m=0$ 的兩個實數根，且 $\overline{AC}<\overline{BC}$ 。則下列何者正確？



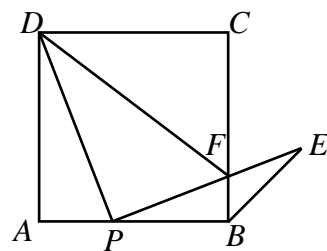
- (A)  $m=1$ ； $\overline{AC}=3$ ； $\overline{BC}=4$  (B)  $m=2$ ； $\overline{AC}=3$ ； $\overline{BC}=4$   
 (C)  $m=1$ ； $\overline{AC}=2$ ； $\overline{BC}=4$  (D)  $m=2$ ； $\overline{AC}=2$ ； $\overline{BC}=4$

15. 有一塔形幾何體由若干個正方體構成，例圖即為三個正立方體的構成方式，上層正方體下底面的四個頂點為下層正方體上底面各邊的中點。已知最底層正方體的邊長為2，該塔形幾何體的表面積(含最底層正方體的下底面積)超過39，該塔形幾何體中正方體個數最少是幾個？

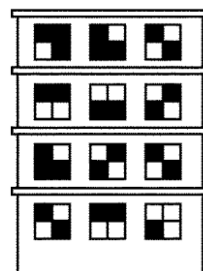
- (A) 4個 (B) 5個 (C) 6個 (D) 7個



16. 如右圖， $ABCD$ 為正方形，點 $P$ 是 $\overline{AB}$ 邊上的一點(但不是正方形的頂點)。連接 $\overline{PD}$ 並將線段 $\overline{PD}$ 繞點 $P$ 順時針方向旋轉 $90^\circ$ 得到線段 $\overline{PE}$ ，且 $\overline{PE}$ 交 $\overline{BC}$ 於點 $F$ ，連接 $\overline{BE}$ 跟 $\overline{DF}$ 。則 $\angle CBE$ 的度數為何？  
 (A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $75^\circ$

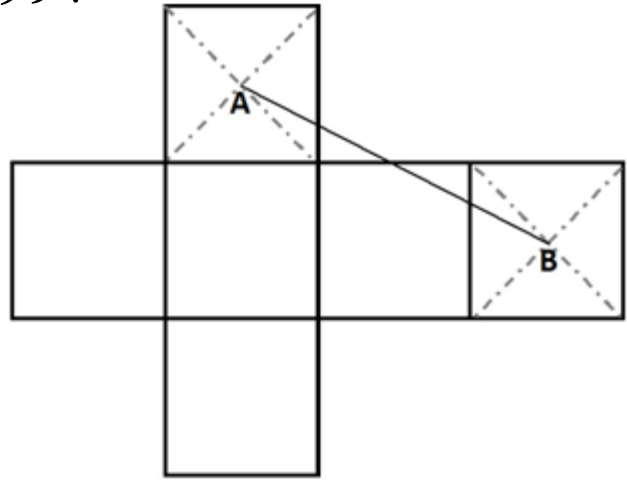


17. 如圖，有一座四層樓房，每個窗戶的4塊玻璃分別塗上黑色和白色，每個窗戶代表一個數字，每層樓有三個窗戶，由左而右表示一個三位數，四個樓層有四個三位數：275、362、612、791，請問第四層樓表示哪個三位數？  
 (A) 275 (B) 362 (C) 612 (D) 791



18. 在正方體的所有展開圖中，每一個展開圖都是由 6 個正方形所組成；例圖即為正方體的一種展開圖。若每一個正方形對角線的交點稱為該正方形的中心點（例如下圖中的 A、B 兩點）。試求，在邊長為 1 的正方體所有不同的展開圖中，任兩個相異中心點在展開圖所在平面上的最遠距離是多少？

- (A)  $\sqrt{11}$  (B)  $\sqrt{13}$  (C)  $\sqrt{17}$  (D)  $\sqrt{20}$



19. 自 1, 2, 3, …, 100 從這 100 個數中選取相異兩個數相加，並使他們的和大於 100，請問共有多少種不同的選法？  
 (A) 1275 (B) 2500 (C) 2550 (D) 2601
20. 有一個等差數列的項數為奇數，其中奇數項的總和為 221，偶數項的總和為 204；則這個等差數列的項數為何？  
 (A) 23 (B) 25 (C) 27 (D) 29
21. 化簡  $\frac{\sqrt{17} + 2\sqrt{14} + \sqrt{11}}{(\sqrt{17} + \sqrt{14})(\sqrt{14} + \sqrt{11})} + \frac{\sqrt{11} + 4\sqrt{2} + \sqrt{5}}{(\sqrt{11} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{2} + \sqrt{5})}$  的值為下列何者？  
 (A)  $\frac{\sqrt{17} - \sqrt{5}}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{17} + \sqrt{5}}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{14} - 2\sqrt{2}}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{14} + 2\sqrt{2}}{3}$
22.  $|5 - 7|$  在數線上表示 7 和 5 之間的距離，請問在下列四個選項中，哪一個選項的  $x$  值在數線上找不到？  
 (A)  $|x - 3| = 5$  (B)  $|x - 3| + |x + 2| = 3$  (C)  $|x - 3| + |x + 2| = 7$  (D)  $|x - 3| = |x + 2|$