

臺南市 107 年公私立國民中學數學競賽決賽試題

注意事項：

1. 本試題有兩頁，總分為 100 分，共兩大題；第一大題為填充題共 10 題每題 6 分，合計 60 分；第二大題為計算證明題共 4 題，每題配分標註於題目後，合計 40 分。
2. 請將答案以藍筆或黑筆書寫於答案本內標示的位置作答。
3. 以鉛筆作答，或未按答案本標示題號作答者該題以 0 分計算。

第一大題：填充題

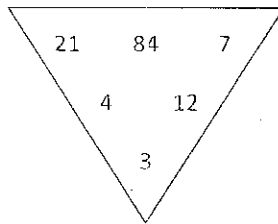
1. 計算  $\frac{201820190}{20182019^2 - 20182018 \times 20182020}$  的值為\_\_\_\_\_。
2. 計算  $\frac{(2 \times 7 + 6) \times (4 \times 9 + 6) \times (6 \times 11 + 6) \times \dots \times (2014 \times 2019 + 6) \times (2016 \times 2021 + 6) \times (2018 \times 2023 + 6)}{(1 \times 6 + 6) \times (3 \times 8 + 6) \times (5 \times 10 + 6) \times \dots \times (2013 \times 2018 + 6) \times (2015 \times 2020 + 6) \times (2017 \times 2022 + 6)}$  的值為\_\_\_\_\_。(需化至最簡分數)
3. 已知  $a = \sqrt{5}$ ，化簡式子  $\frac{(a+1)^2 - 4a + 3}{\sqrt{a^2 - 8a + 16}} \div \left( \frac{a^2 - 2a + 4}{a^2 - 5a + 4} \right) \times \left( \frac{1}{a+2} \right) - \left( \frac{a^2 - 2a}{4 - a^2} \right) =$ \_\_\_\_\_。(需化為最簡式)
4. 有一個六位數，其前三位數字與後三位數字完全相同，順序也完全相同，則此六位數除以 1001 得餘數為\_\_\_\_\_。
5. 從 100 到 999 的所有三位數中，滿足百位數字加上十位數字再加個位數字總和為 25 的所有三位數其總和為\_\_\_\_\_。
6. 假設直角  $\triangle ABC$  的兩股  $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$  長度的和為  $a$ ，點  $M$  是斜邊  $\overline{AB}$  的中點，且  $\overline{MA} = \overline{MB} = 5$ 。若  $a$  為正整數，則滿足上述條件的所有  $a$  值之和為\_\_\_\_\_。
7. 已知  $x$  為整數， $p$  為正質數，且滿足  $6x^2 - 7x = p^2 + 5$ ，則  $p$  的值為\_\_\_\_\_。
8. 有一個  $n$  位數  $A$ ，具備以下兩個性質：
  - (1)  $A$  中每一位數的數字都是 1 或 2，
  - (2)  $A$  中至少有相鄰的二個數字都是 1，
 例如： $n=3$ ， $A$  的所有可能值有 112、211 及 111 都滿足此二性質。  
 另一個  $m$  位數  $B$ ，具備以下兩個性質：
  - (1)  $B$  中每一位數都是 0 或 1，
  - (2)  $B$  中至少有相鄰的二個數字都是 0，
 例如： $m=3$ ， $B$  只有 100 滿足此二性質。  
 若  $a_n$  表示  $n$  位數  $A$  的個數， $b_m$  表示  $m$  位數  $B$  的個數，則  $a_1 + b_1$  之值為\_\_\_\_\_。
9. 已知  $\alpha, \beta, \gamma$  均為正整數且滿足  $\frac{7^{\alpha+\beta} + 7^{\beta+\gamma} + 7^{\gamma+\alpha}}{49^\alpha + 49^\beta + 49^\gamma} = 1$ ，則  $3\alpha - 5\beta + 2\gamma$  的值為\_\_\_\_\_。



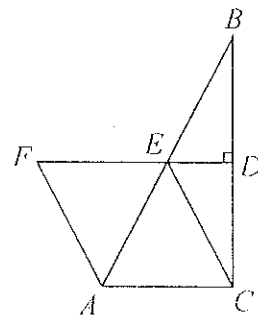
10. 若正整數  $a, b, c$  滿足  $ab + bc = 44$  和  $ac + bc = 23$ ，則  $a - b + c$  所有可能的值為 \_\_\_\_\_。

第二大題：計算證明及作圖題

1. 我們稱一個「 $n$  階魔術三角形數」是由一些相異正整數作下列方式排列：將每一列任意相鄰二數中較大的數能被較小的數所整除，且商放在下一列，例如下圖表示邊長為 3 的三階魔術三角形數的其中一個例子。在這個例子中第一列的數分別為 21、84、7，最大的數為 84，第二列的數分別為 4、12，最大的數為 12，第三列的數為 3，最大的數就是 3；在每一列的最大數 84、12、3 中最小的值為 3。試問，在所有可能的四階魔術三角形數中每一列的最大數中，最小的值是多少？請完整寫出計算過程。(12 分)



2. 已知長方形  $A$  的長為  $m$ ，寬為  $n$ ，試問是否存在一個長方形  $B$ ，使它與長方形  $A$  的周長比值和面積比值都等於 19？請完整說明理由。(12 分)
3. 如圖，在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{BC}$  的垂直平分線  $\overline{DE}$  交  $\overline{BC}$  於  $D$  點，交  $\overline{AB}$  於  $E$  點，點  $F$  在  $\overline{DE}$  上與  $D$  點分別位於  $E$  點的兩側，且  $\overline{AF} = \overline{CE}$ 。
- (1) 求證：四邊形  $ACEF$  是平行四邊形。(4 分)
- (2) 當  $\angle ABC$  的角度等於多少時，四邊形  $ACEF$  是菱形？請回答並證明你的答案。(2 分)
- (3) 承(2)，當  $\overline{BC} = 2$  時，由線段  $\overline{AC}$ 、線段  $\overline{CB}$ 、線段  $\overline{BE}$ 、線段  $\overline{EF}$  及線段  $\overline{FA}$  所圍成的多邊形面積為多少？(2 分)



4. 如圖， $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，且  $\overline{AC} = \overline{BC}$ ， $D$ 、 $E$  為  $\overline{AB}$  上的二點，使得  $\angle DCE = 45^\circ$ ，

試證： $\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BE}^2$ 。(8 分)

